Додатна за први разред МГ
29.март 2005.г.

Теорија бројева

Милан Новаковић

1. Наћи све $m, n \in \mathbb{N}$ тако $m^2 - n \mid m + n^2$ и $n^2 - m \mid n + m^2$.
2. Наћи све природне бројеве m и n тако да су $m^2 + 4n$ и $n^2 + 4m$ потпуни квадрати.
3. Доказати да $(36m + n)(36n + m)$ није степен броја 2 ни за какве природне m и n.
4. Доказати да $5n^2 = 36a^2 + 18b^2 + 6c^2$ нема целобројних решења осим $a = b = c = n = 0$.
5. Наћи све природне m и n такве да је $2^m - 3^n = 7$.
6. Одредити све просте бројеве p и q такве да је $p(p + 1) + q(q + 1) = n(n + 1)$ за неко природно n.
7. Нека природни бројеви a, b, c задовољавају $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ и нека је $d = (a, b, c)$. Доказати да су $abcd$ и $d(b - a)$ потпуни квадрати.
8. Наћи сва решења једначине $2^m + 3^n = k^2$ у $\mathbb{N}_0$.
9. Нека је p непаран прост број. Доказати да постоје јединствени природни бројеви m и n такви да је $m^2 = n(n + p)$.
10. Решити $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{3}{c} = 1$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.
11. Одредити све просте бројеве p и q такве да је $p(p + 3) + q(q + 3) = n(n + 3)$ за неко природно n.
12. Решити $a! + b! + c! = 2^n$ у скупу $\mathbb{N}$.
13. Наћи све природне бројеве n који имају тачно 16 позитивних делилаца $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{16} = n$ таквих да је $d_6 = 18$ и $d_9 - d_8 = 17$.
14. Ако је p прост број, доказати да $2^p + 3^p$ не може бити прави степен природног броја.
15. Одредити различите природне бројеве a и b такве да је $b^2 + a$ степен простог броја који дели $a^2 + b$.
16. За по паровима узајамно просте бројеве x, y, z и t важи $xy + yz + zt = xt$. Доказати да је сума квадрата нека два од тих бројева дупло већа од суме квадрата преостала два броја.
17. Наћи све природне бројеве m и n тако да су $m^2 + 3n$ и $n^2 + 3m$ потпуни квадрати.
18. Нека су p и q прости бројеви такви да је $p^2 + 1$ дељиво са q, а $q^2 - 1$ дељиво са p. Доказати да је $p + q + 1$ сложен.
19. Ако за прост број p важи $p^2 = 2^m 3^n + 1$, $m, n \in \mathbb{N}$, доказати да је $p \leqslant 17$.
20. Нека је n природан број. У интервалу $(n^2, n^2 + n)$ изабрана су два различита броја a и b. Доказати да у том интервалу не постоји број који дели ab, различит од a и b.

21. Ако је за природне бројеве a и b број

$$\frac{b+1}{a} + \frac{a+1}{b}$$

цео, доказати да је $(a,b) < \sqrt{a+b}$.

22. Да ли постоје природни бројеви x и y такви да је сваки од бројева:

    (а) $x+y,\ 2x+y,\ x+2y$;

    (б) $x+y,\ 2x+y,\ 3x+y$

    потпун квадрат?

23. Решити $(2^k+2^l)^2 = 2^m + 2^n$ у скупу природних бројева.

24. Нека су a,b,x,y природни бројеви такви да $a^2+b^2 \mid ax+by$. Доказати да је $(x^2+y^2, a^2+b^2) = 1$.

25. Ако су x и y природни бројеви такви да $x+y-1 \mid x^2+y^2-1$ доказати да је $x+y-1$ сложен.

26. Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ различити прости бројеви већи од 3, доказати да број $2^{p_1p_2\cdots p_n}+1$ има бар 4^n делилаца.